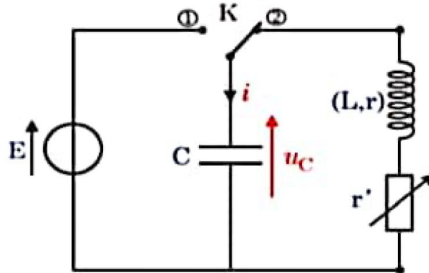


Oscillations libres d'un circuit RLC

I. Décharge d'un condensateur dans une bobine:

On réalise le montage suivant:



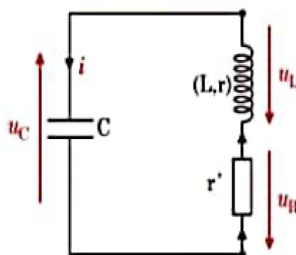
on place l'interrupteur (K) sur la position (1), le condensateur se charge, puis on bascule l'interrupteur sur la position (2). Le condensateur se décharge dans la bobine et le conducteur ohmique.

Selon la valeur de la résistance du circuit, on observe sur l'écran de l'oscilloscope les régimes suivants:

Régime pseudo-périodique	Régime critique	Régime apériodique
R faible	R grande	R plus grande
	u_c tend rapidement vers zéro	u_c tend vers zéro sans oscillations

II. Etude analytique d'un circuit oscillant:

1. Equation différentielle d'un circuit RLC en série:



d'après la loi d'additivité des tensions:

$$u_L + u_R + u_C = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + r'i + R'i + u_C = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + (R+r)i + u_C = 0$$

avec: $i = c \frac{du_C}{dt}$

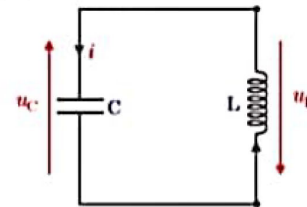
$$\frac{di}{dt} = c \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

$$Lc \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R+r)c \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{(R+r)}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

2. circuit LC idéal:

Association en série d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L et de résistance nulle.



Equation différentielle:

d'après la loi d'additivité des tensions:

$$u_L + u_C = 0$$

$$-L \frac{di}{dt} + u_C = 0$$

$$Lc \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

Solution de l'équation différentielle:

La solution de l'équation différentielle précédente s'écrit sous la forme:

$$u_C(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

- U_m : tension maximale aux bornes du condensateur.
- T_0 : Période propre de l'oscillation en (s).
- φ : phase

→ Détermination de l'expression de T_0 :

$$u_C = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right) U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_c$$

$$\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 u_c = 0$$

par identification avec l'équation différentielle on trouve:

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$$

→ Détermination de φ :

$$\text{à } t=0: u_c(0) = U_m \cos \varphi = U_m$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0$$

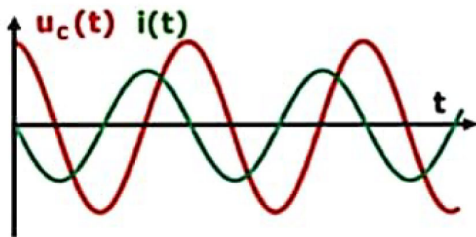
→ Représentation de u_c et i en fonction t :

$$u_c(t) = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$i = c \frac{du_c}{dt} = -c \left(\frac{2\pi}{T_0}\right) U_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right)$$

$$i = \underbrace{c \left(\frac{2\pi}{T_0}\right) U_m}_{I_m} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i(t) = I_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Conclusion:

u_c et i sont en quadrature de phase. lorsque l'une est maximale ou bien minimale l'autre s'annule.

III - Énergie d'un circuit oscillant:

⊙ Énergie totale:

$$E_T = E_m + E_e = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} c u_c^2$$

⊙ La Conservation de l'énergie totale:

$$\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2} L \frac{di^2}{dt} + \frac{1}{2} c \frac{du_c^2}{dt}$$

$$= \frac{1}{2} L \left(2i \frac{di}{dt}\right) + \frac{1}{2} c \left(2u_c \frac{du_c}{dt}\right)$$

$$\frac{dE_T}{dt} = L i \frac{di}{dt} + c u_c \frac{du_c}{dt}$$

$$\text{avec: } i = c \frac{du_c}{dt}$$

$$\cdot \frac{di}{dt} = c \frac{d^2 u_c}{dt^2}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = L c^2 \frac{du_c}{dt} \cdot \frac{d^2 u_c}{dt^2} + c u_c \frac{du_c}{dt}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = L c^2 \frac{du_c}{dt} \left[\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c \right]$$

Circuit RLC en série

d'après l'équ. diff.

$$\frac{du_c}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c = -\frac{R_T}{L} \frac{du_c}{dt}$$

Donc:

$$\frac{dE_T}{dt} = L c^2 \frac{du_c}{dt} \left[-\frac{R_T}{L} \frac{du_c}{dt} \right]$$

$$= -R_T c^2 \left(\frac{du_c}{dt} \right)^2$$

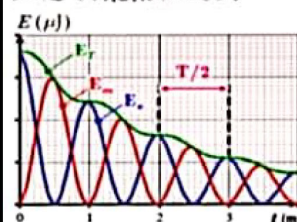
$$= -R_T \left(c \frac{du_c}{dt} \right)^2$$

$$\frac{dE_T}{dt} = -R_T i^2 < 0$$

$$\Rightarrow E_T \downarrow$$

L'énergie totale diminue au cours du temps.

- Les oscillations sont amorties à cause de la dissipation de l'énergie par effet joule dans la résistance.



Circuit LC idéal

$$\frac{dE_T}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow E_T = \text{cte}$$

Donc l'énergie d'un circuit LC se conserve.

À chaque instant il y a transformation mutuelle de l'énergie électrostatique E_e énergie magnétique E_m ou l'inverse.

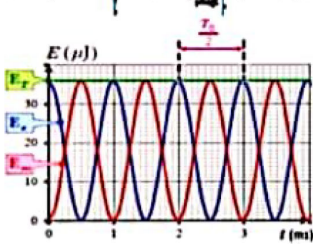
on a donc:

$$\begin{array}{ccc} -U_m & 0 & U_m \\ |z_0 & |z_{\pm \frac{T}{2}} & |z_0 \end{array}$$

$$E_e = E_{\text{max}}, E_e = 0, E_e = E_{\text{max}}$$

$$E_m = 0, E_m = E_{\text{max}}, E_m = 0$$

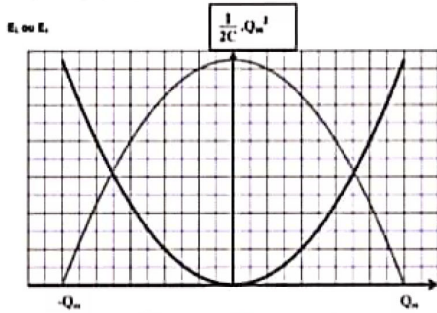
$$\Rightarrow E_T = E_{\text{max}}, E_T = E_{\text{max}}, E_T = E_{\text{max}}$$



① Différents types de diagrammes Énergétiques pour un circuit LC idéal;

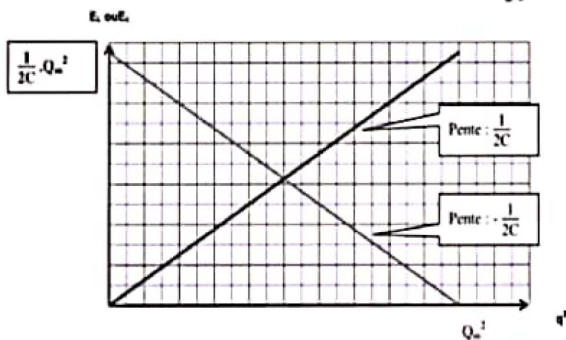
• Courbe de variation de $E_e = f(q)$ et $E_m = g(q)$:

- $E_T = E_m + E_e = E_{e_{max}} = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} = cte$
- $E_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$: c'est l'équation d'une parabole.
- $E_m = -E_e + E_T = -\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} = aq^2 + b$: c'est l'équ. d'une parabole.
 $E_m = \frac{1}{2C} (Q_m^2 - q^2)$



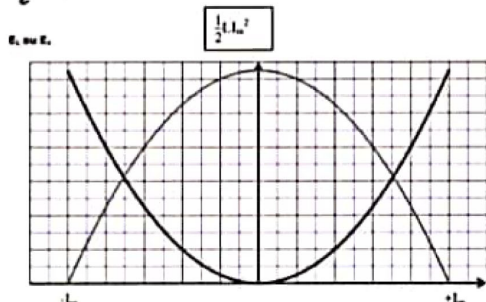
• Courbe de variation de $E_e = f(q^2)$ et $E_m = g(q^2)$:

- $E_T = E_m + E_e = E_{e_{max}} = E_{m_{max}} = cte$
- $E_e = \frac{1}{2C} q^2 = a q^2$: c'est l'équation d'une droite linéaire croissante, de coef. directeur (Pente): $a = \frac{1}{2C} > 0$
- $E_m = -E_e + E_T = -\frac{1}{2C} q^2 + E_T = a' q^2 + b$: c'est l'équ. d'une droite aff. liné. décroissante, de coef. directeur est $a' = -\frac{1}{2C} < 0$



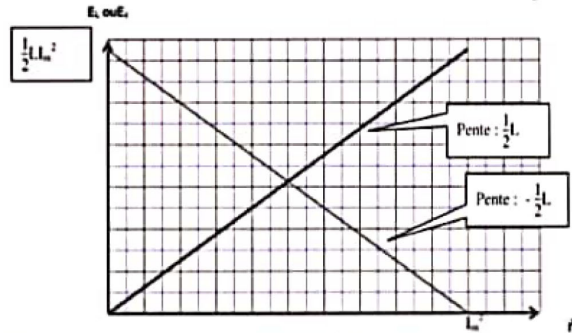
• Courbe de variation de $E_m = f(i)$ et $E_e = g(i)$:

- $E_T = E_m + E_e = E_{m_{max}} = \frac{1}{2} L I_m^2 = cte$
- $E_m = \frac{1}{2} L i^2 = a i^2$: c'est l'équ. d'une parabole.
- $E_e = -E_m + E_T = -\frac{1}{2} L i^2 + E_T = a' i^2 + b$: c'est l'équ. d'une parabole.
 $E_e = \frac{1}{2} L (I_m^2 - i^2)$



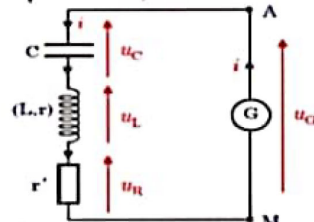
• Courbe de variation de $E_m = f(i^2)$ et $E_e = g(i)$:

- $E_T = E_m + E_e = E_{m_{max}} = E_{e_{max}} = cte$.
- $E_m = \frac{1}{2} L i^2 = a i^2$: c'est l'équ. d'une droite linéaire croissante, le coef. directeur est $a = \frac{1}{2} L > 0$.
- $E_e = -E_m + E_T = -\frac{1}{2} L i^2 + E_T = a' i^2 + b$: c'est l'équ. d'une droite aff. liné. décroissante, le coef. directeur est $a' = -\frac{1}{2} L < 0$



IV - Entretien des oscillations:

Pour entretenir les oscillations, il faut compenser les pertes d'énergie par effet joule, pour cela on monte en série un générateur délivre une tension proportionnelle à l'intensité du courant ($U_g = k i$) avec le dipôle RLC.



d'après la loi d'additivité des tensions:

$$\begin{aligned} U_L + U_R + U_C &= U_G \\ L \frac{di}{dt} + r i + R i + U_C &= k i \\ L \frac{di}{dt} + (R+r) i + U_C &= k i \\ L \frac{di}{dt} + (R_T - k) i + U_C &= 0 \\ L C \frac{d^2 u_C}{dt^2} + (R_T - k) C \frac{d u_C}{dt} + U_C &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{(R_T - k)}{L} \frac{d u_C}{dt} + \frac{1}{LC} U_C = 0$$

Pour avoir des oscillations sinusoïdale il faut que l'équation différentielle s'écrive sous la forme: $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} U_C = 0$

c.a.d: $R_T - k = 0$
 $\Rightarrow \underline{k = R_T}$