المسألة (11 نقطة) :

الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$

و (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة 1cm)

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا — 0.5

2) أ) تحقق أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$ — 0.25

ب) استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ — 0.5

ج) بين لكل x من المجال $]0,+\infty[$: $\frac{(\ln x)^2}{x}=4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ثم استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ — 0.5

د) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ — 0.75

3) أ) بين أن لكل x من $]0,1]$: $(x-1)+\ln x\le 0$ و أن لكل x من $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x\ge 0$ — 0.5

ب) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$ — 1

ج) ضع جدول تغيرات الدالة f — 0.5

4)أ) بين أن $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ لكل x من $]0,+\infty[$ — 0.5

ب) استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها — 0.5

5) أ) بين أن لكل x من $]0,+\infty[$ ، $f(x)-x=\frac{1}{2}(\ln x-1)^2$ و استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C) و المستقيم (Δ) — 0.5

ب) أنشئ (Δ) و (C) في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ — 1

6) أ) بين أن الدالة $H:x\mapsto x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$ — 0.5

ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$ — 0.75

ج) احسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ — 0.5

الجزء الثاني :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) أ) بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ $1\le u_n\le e$ — 0.5

ب) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية — 0.5

ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة — 0.5

2) أحسب نهاية المتتالية (u_n) — 0.75