المسألة : (11 ن)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

و ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2\ cm$)

I) 0.5 1) بين أن $D_f=]0,e[\cup]e,+\infty[$ (D_f هي مجموعة تعريف الدالة f)

0.75 2) أ- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x<e}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to e\\x>e}} f(x)$ و أول هندسيا النتيجتين المتوصل إليهما .

0.5 ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا بجوار $+\infty$ يتم تحديده .

0.5 ج- بين أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ ثم أول هندسيا النتيجة (لحساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ لاحظ أن $x(1-\ln x)=x-x\ln x$)

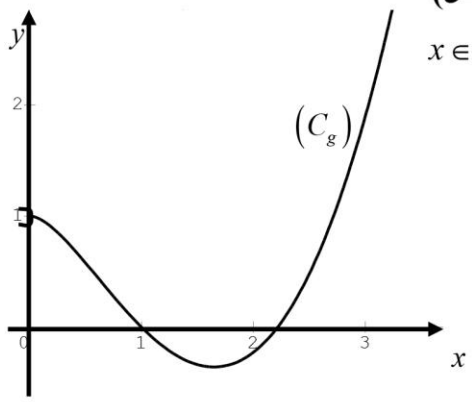
0.75 3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$ لكل x من D_f

1 ب- بين أن الدالة f تناقصية على المجال $]0,1]$ و تزايدية على كل من المجالين $[1,e[$ و $]e,+\infty[$

0.25 ج- ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f

II) لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-x^2(1-\ln x)$

و ليكن (C_g) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم (انظر الشكل)



0.5 1) أ- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة (E) التالية : $g(x)=0$ ، $x\in]0,+\infty[$

0.5 ب- نعطي جدول القيم التالي :

x	2,1	2,2	2,3	2,4
$g(x)$	−0,14	−0,02	0,12	0,28

بين أن المعادلة (E) تقبل حلا α بحيث $2,2<\alpha<2,3$

0.25 2) أ- تحقق من أن $f(x)-x=\dfrac{g(x)}{x(1-\ln x)}$ لكل x من D_f

0.5 ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ يقطع المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين أفصولاهما 1 و α

0.5 ج- حدد ، انطلاقا من (C_g)، إشارة الدالة g على المجال $[1\ ,\ \alpha]$ و بين أن $f(x)-x\le 0$ لكل x من $[1\ ,\ \alpha]$

1.25 3) أنشئ ، في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$، المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f)

0.75 4) أ- بين أن $\int_1^{\sqrt{e}} \dfrac{1}{x(1-\ln x)}dx=\ln 2$ (لاحظ أن : $\dfrac{1}{x(1-\ln x)}=\dfrac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}$ لكل x من D_f)

0.75 ب- احسب ، ب cm^2، مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\sqrt{e}$

III) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=2$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من IN

0.5 1) بين بالترجع أن $1\le u_n\le\alpha$ لكل n من IN

0.5 2) بين أن المتتالية (u_n) تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال II) 2) ج-)

0.75 3) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها .