مسألة (11 ن)

I- لتكن g **الدالة العددية المعرفة على المجال** $]0,+\infty[$ **بما يلي :** $g(x)=x-2\ln x$.

1) أ- احسب $g'(x)$ **لكل** x **من المجال** $]0,+\infty[$.	0,5
ب- بين أن g **تناقصية على** $]0,2]$ **وتزايدية على** $[2,+\infty[$.	0,5
2) استنتج أن $g(x)>0$ **لكل** x **من المجال** $]0,+\infty[$ **(لاحظ أن** $g(2)>0$**).**	0,5
II- نعتبر الدالة العددية f **المعرفة على المجال** $]0,+\infty[$ **بما يلي :** $f(x)=x-(\ln x)^2$. **ليكن** (C) **المنحنى الممثل للدالة** f **في معلم متعامد ممنظم** $(O,\vec{i},\vec{j})$.	
1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ **وأول النتيجة هندسيا .**	0,75
2) أ- بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ **(يمكنك وضع** $t=\sqrt{x}$ **. نذكر أن :** $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$ **).**	0,5
ب- استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ **و أن** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ **(لاحظ أن :** $f(x)=x\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)$ **) .**	0,75
ج – احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ **ثم استنتج أن المنحنى** (C) **يقبل ، بجوار** $+\infty$ **، فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم** (Δ) **الذي معادلته** $y=x$.	0,5
د- بين أن المنحنى (C) **يوجد تحت المستقيم** (Δ).	0,25
3) أ- بين أن : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ **لكل** x **من** $]0,+\infty[$ **و بين أن** f **تزايدية قطعا على** $]0,+\infty[$.	0,75
ب- ضع جدول تغيرات الدالة f .	0,25
ج- بين أن $y=x$ **هي معادلة ديكارتية لمماس المنحنى** (C) **في النقطة التي أفصولها** 1 .	0, 5
4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **في** $]0,+\infty[$ **وأن** $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$ **(نقبل أن** $(\ln 2)^2<\frac{1}{2}$**).**	0, 5
5) أنشئ المستقيم (Δ) **و المنحنى** (C) **في المعلم** $(O,\vec{i},\vec{j})$ **(نقبل أن** $I(e,e-1)$ **نقطة انعطاف للمنحنى** (C) **و نأخذ** $e\approx2,7$ **) .**	1
6) أ- بين أن $H:x\mapsto x\ln x-x$ **دالة أصلية للدالة** $\ln:x\mapsto\ln x$ **على المجال** $]0,+\infty[$ **ثم بين أن:** $\int_1^e \ln x\,dx=1$.	0,5
ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\int_1^e(\ln x)^2dx=e-2$.	0,75
ج- احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) **والمستقيم** (Δ) **والمستقيمين اللذين معادلتاهما** $x=1$ **و** $x=e$.	0,5
III- نعتبر المتتالية العددية (u_n) **المعرفة بما يلي :** $u_0=2$ **و** $u_{n+1}=f(u_n)$ **لكل** n **من** IN.	
1) بين أن $1\le u_n\le2$ **لكل** n **من** IN **(يمكنك استعمال نتيجة السؤال II-3) أ-) .**	0,75
2) بين أن المتتالية (u_n)**تناقصية.**	0,5
3) استنتج أن (u_n) **متقاربة ثم حدد نهايتها.**	0,75