حركة قذيفة في مجال الثقالة المنتظم

I – تعريف

نسمي قذيفة كل جسم تم إرساله من سطح الأرض بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ على أن يبقى قريبا من سطح الأرض .

خلال هذه الدراسة ، نهمل قوى الآحتكاك مع الهواء ، ونعتبر أن القذيفة خاضعة لوزنها فقط أي حركتها سقوط حر .

1 ـ متجهة التسارع

نرسل من نقطة O قذيفة (كرية) ذات كتلة m بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ غير رأسية أي أنها تكون زاوية α مع المستوى الأفقي Oxy ، نسمي الزاوية α بزاوية القذف. نعتبر أن مجال الثقالة منتظم .

ندرس حركة القذيفة في مرجع أرضي نعتبره غاليليا ، بحيث نمعلم مواضع G مركز قصور القذيفة في كل لحظة بإحداثياتها في معلم متعامد وممنظم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ مرتبط بالمرجع الأرضي .

نطبق القانون الثاني لنيوتن :

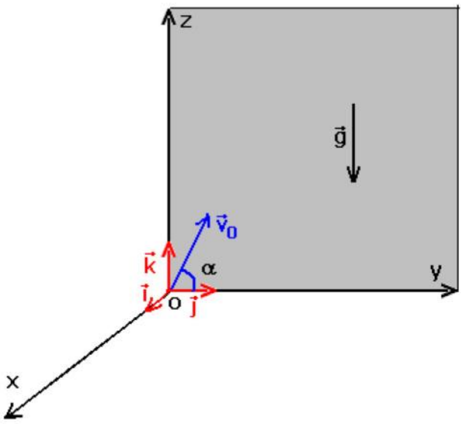
تخضع القذيفة إلى وزنها فقط أي أن $\vec{P}=m.\vec{a}_G$ ومنه $\vec{a}_G=\vec{g}$ (1)

إحداثيات $\vec{a}_G$ في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

على المحور $(O,\vec{i})$ لدينا $a_x=0$

على المحور $(O,\vec{j})$ لدينا $a_y=0$

على المحور $(O,\vec{k})$ لدينا $a_z=-g$



أي أن متجهة التسارع $\vec{a}_G$ رأسية منحاها من الأعلى نحو الأسفل ومنظمها يساوي عدديا منظم متجهة الثقالة $\vec{g}$.

2 ـ متجهة السرعة

لدينا حسب متجهة التسارع :

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt}=0 \\ \dfrac{dv_y}{dt}=0 \\ \dfrac{dv_z}{dt}=-g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x=C_1 \\ v_y=C_2 \\ v_z=-gt+C_3 \end{cases}$$

C_1,C_2,C_3 ثوابت تحدد انطلاقا من الشروط البدئية .

أن متجهة السرعة البدئية توجد في المستوى (Oyz)

عند اللحظة $t_0=0$ لدينا :

وبالتالي ستكون $\vec{v}_0 \begin{cases} v_{0x}=0 \\ v_{0y}=v_0\cos\alpha \\ v_{0z}=v_0\sin\alpha \end{cases}$

أي أن إحداثيات متجهة السرعة في المعلم $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ هي :

$$(2)\ \vec{v}_G \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

3 ـ المعادلات الزمنية للحركة :

لدينا :

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = v_0 \cos\alpha \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = C_4 \\ y = (v_0 \cos\alpha)t + C_5 \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + C_6 \end{cases}$$

بحيث أن C_4, C_5, C_6 توابث يجب تحديدها انطلاقا من الشروط البدئية أي أنه في اللحظة $t_0 = 0$ لدينا :

$$\overrightarrow{OG_0} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \text{ وبالتالي فإن } \begin{cases} C_4 = 0 \\ C_5 = 0 \\ C_6 = 0 \end{cases}$$

وبالتالي تكون إحداثيات النقطة G في اللحظة t في المعلم $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ هي كالتي :

$$\overrightarrow{OG} \begin{cases} x = 0 \\ y = (v_0 \cos\alpha)t \quad (1) \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \quad (2) \end{cases}$$

من خلال هذه المعادلات يتبين أن حركة G تتم في المستوى الرأسي (Oyz) نقول أن **الحركة مستوية**

- على المحور $(O, \vec{j})$ ، حركة G حركة مستقيمية منتظمة
- على المحور $(O, \vec{k})$ ، حركة مستقيمية متغيرة بانتظام .

4 ـ معادلة المسار

معادلة المسار هي العلاقة التي تجمع بين إحداثيتي النقطة المتحركة G ونحصل عليها بإقصاء المتغير t بين y و z .

من المعادلتين الزمنيتين (1) و (2) نحصل على :

$$y = (v_0 \cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0 \cos\alpha}$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t$$

أي أن معادلة المسار هي :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \sin^2\alpha}y^2 + y\tan\alpha$$

نستنتج أن مسار مركز قصور قذيفة في سقوط حر بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ غير رأسية في مجال الثقالة منتظم هو جزء من شلجم ينتمي إلى المستوى الرأسي الذي يحتوي على المتجهة $\vec{v}_0$.

5 ـ بعض مميزات المسار

أ ـ قمة المسار : (la flèche) هي أعلى نقطة يصل إليها مركز قصور القذيفة .

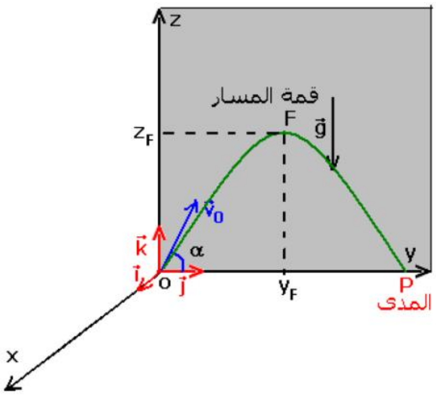
عند وصول مركز قصور القذيفة إلى قمة المسار F تكون لدينا

$\frac{dz}{dt}=0$ بالنسبة ل $y=y_F$

من خلال المعادلة (2) نحصل على :

$$\frac{dz}{dt}=-gt_F+v_0\sin\alpha=0\Rightarrow t_F=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

نعوض t_F في المعادلة (1)



$$y_F=\frac{v_0^2\cos\alpha\sin\alpha}{g}\Rightarrow y_F=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$$

$$z_F=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

ملحوظة : نحصل على أقصى قيمة لقمة المسار إذا كان

$\alpha=\frac{\pi}{2}$ أي في حالة إرسال قذيفة رأسيا نحو الأعلى .

ب ـ المدى la portée

هو المسافة بين الموضع G_0 لمركز قصور القديفة لحظة انطلاقها والموضع P للنقطة G أثناء سقوط القذيفة بحيث تنتمي P إلى المحور الأفقي الذي يشمل G_0 .

لتكن y_P و z_P إحداثيتا النقطة P ، لدينا : $z_P=0$

أي أن

$$y_P\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos\alpha}y_p+\tan\alpha\right)=0\Rightarrow\begin{cases}y_p=0\\ ou\\ y_p=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}\end{cases}$$

6- تمرين تطبيقي :

الميكانيك (6 نقط) :

يتضمن التمرين جزئين مستقلين

الجزء الأول : دراسة حركة مركز قصور كرة (3,75 نقط)

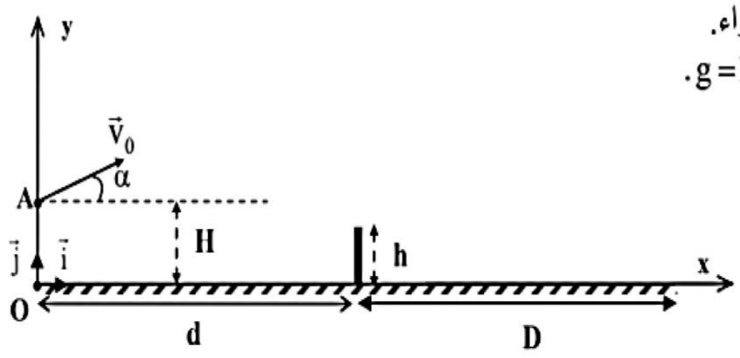
قام أحد التلاميذ ، خلال مباراة في الكرة الطائرة ، بتصوير شريط فيديو لحركة الكرة ابتداء من لحظة إنجاز إرسال (service) من موضع A على ارتفاع H من سطح الأرض . يوجد اللاعب الذي أنجز الإرسال على مسافة d من الشبكة . (أنظر الشكل 1)

ليكون الإرسال مقبولا ، يجب على الكرة تحقيق الشرطين التاليين معا :

- أن تمر من فوق الشبكة التي يوجد طرفها العلوي على ارتفاع h من سطح الأرض .
- أن تسقط في مجال الخصم الذي طوله D .

معطيات:

- نهمل أبعاد الكرة وتأثير الهواء.
- نأخذ شدة الثقالة: $g = 10\ m.s^{-2}$.
- $H = 2,60\ m$.
- $d = D = 9\ m$.
- $h = 2,50\ m$.



الشكل 1

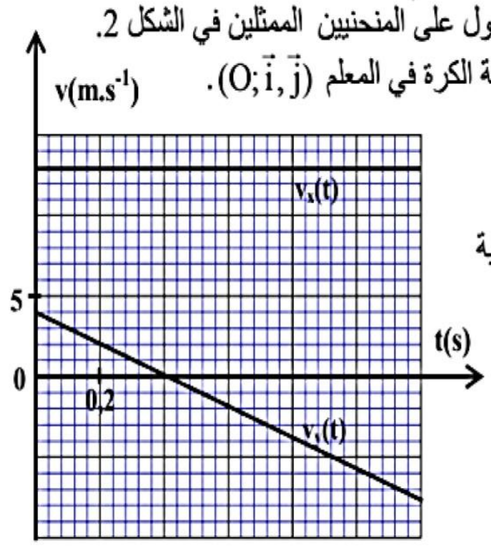
ندرس حركة الكرة في معلم متعامد وممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$ مرتبط بالأرض والذي نعتبره غاليليا .

تكون الكرة ، عند أصل التواريخ ، منطبقة مع النقطة A .

تُكوّن متجهة السرعة البدئية $\vec{V}_0$ زاوية α مع الخط الأفقي (الشكل 1).

بعد معالجة الشريط المصوّر بواسطة برنم مناسب ، تم الحصول على المنحنيين الممثلين في الشكل 2.

يمثل المنحنيان $v_x(t)$ و $v_y(t)$ تغيرات إحداثيتي متجهة سرعة الكرة في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.



الشكل 2

1 -1- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن ، أثبت تعبير $v_x(t)$ بدلالة V_0 و α وتعبير $v_y(t)$ بدلالة V_0 و α و g و t .

1 -2- باستغلال المنحنيين (الشكل 2) ، بيّن أن قيمة السرعة البدئية هي $V_0 \approx 13,6\ m.s^{-1}$ وأن الزاوية α هي $\alpha \approx 17°$.

0,75 -3- أوجد معادلة مسار G في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 -4- علما أنه لم يعترض الكرة أي لاعب ، هل حققت الكرة الشرطين اللازمين لقبول الإرسال ؟ علل الجواب .