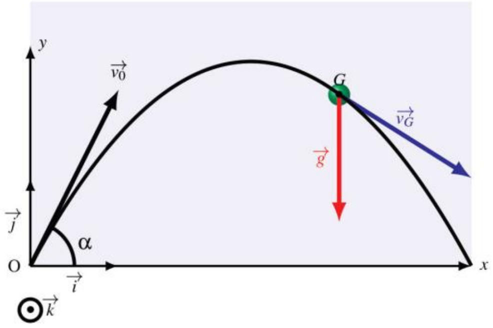
LE MOUVEMENT D'UN PROJECTILE DANS UN CHAMP DE PESANTEUR UNIFORME

1. Equations diffenrentielles du mouvement :

Une bille est lancée avec une vitesse $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec le plan horizontal. Étudions le mouvement de son centre d'inertie dans le référentiel terrestre . Choisissant un repère $\mathscr{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ lié à ce référentiel.

Les conditions initiales :
Dans ce repère et la date t=0 , nous avons :

$$\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \qquad \vec{v_0}\begin{cases} \dot{x_0} = v_0cos(\alpha) \\ \dot{y_0} = v_0sin(\alpha) \\ \dot{z_0} = 0 \end{cases}$$



À la date t quelconque , G a pour coordonnées (x,y,z) , sa vitesse $\vec{v_G}(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$. On applique la deuxième loi de Newton :

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = m.\vec{a_G}$$

On néglige la résistance de l'air , bilan des forces exercées sur la bille au cours de son mouvement est une seule force le poids de la bille :

$$\Sigma\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} = m.\vec{a_G} \qquad m\vec{a_G} = m.\vec{g} \qquad \boxed{\vec{a_G} = \vec{g}} \quad (1)$$

où $\vec{a_G}$ est le vecteur accélération du centre d'inertie G .

C'est le même résultat de l'étude d'un mouvement de chute libre vertical , se généralise de la façon suivante :

Lors de la chute libre d'un mobile , le vecteur accélération $\vec{a_G}$ de son centre d'inertie est égal au vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$.

On projette la relation vectorielle (1) dans le repère $\mathscr{R}$:

$$\vec{g}\begin{cases} 0 \\ -g \\ 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{a_G}\begin{cases} a_x = \ddot{x} = 0 \\ a_y = \ddot{y} = -g \\ a_z = \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

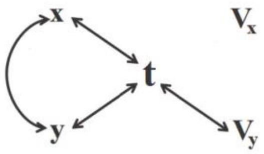
Les trois équations représentent les équations différentielles du mouvement du projectile dans le repère $\mathscr{R}$.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -g \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

2. Equations horaires

* <u>**Les coordonnées du vecteur vitesse**</u> **:** Les coordonnées vecteur vitesse $\vec{v_G}$ sont les primitives des coordonnées du $\vec{a_G}$. compte tenu des conditions initiales , nous obtenons :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x_0} = v_0cos(\alpha) \\ \dfrac{dy}{dt} = \dot{y_0} = -gt + v_0sin(\alpha) \\ \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} = 0 \end{cases}$$



$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

<u>Les coordonnées vecteur position</u> $\overrightarrow{OG}$ sont les primitives des coordonnées du $\vec{v_G}$. compte tenu des conditions initiales , nous obtenons :

$$\begin{cases} x(t) = v_0cos(\alpha).t + x_0 = v_0cos(\alpha) \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0sin(\alpha).t + y_0 = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0sin(\alpha).t \\ z(t) = z_0 = 0 \end{cases}$$

Nous déduisons de ces équations horaires trois résultats importants :
☞ $z = 0$, la trajectoire du centre d'inertie est dans le plan vertical (Ox, Oy) contenant $\vec{v_0}$
☞ $x(t) = v_0cos(\alpha).t$; le mouvement de la projection de G sue Ox est uniforme
☞ $y(t) = -\dfrac{1}{2}g.t^2 + v_0sin(\alpha).t$; le mouvement de la projection de G xur l'axe Oy est uniformément accéléré .

3. Equations de la trajectoire :

Établir l'équation de la trajectoire dans le plan (xOy) consiste à exprimer y en fonction de x $y = f(x)$.
Il faut donc éliminer le paramètre temps t des équations horaires x(t) et y(t) :

$$t = \frac{x}{v_0.cos(\alpha)} \qquad y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2cos^2\alpha} + \frac{v_0sin(\alpha)}{v_0cos(\alpha)}.x \qquad \boxed{y = -\frac{g}{2v_0^2cos^2\alpha}.x^2 + x.tan(\alpha)}$$

Cette équation est de la forme $y = A.x^2 + B.x$ est celle d'une parabole .

4. La portée :

On appelle portée de tir la distance entre le point de lancement O et le point d'impact P sur le plan horizontal contenant O .
On la calcule , c'est la valeur de x différent de 0 qui annule y , c'est à dire : $OP = x_P = \frac{2v_0^2sin(\alpha).cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2sin(2\alpha)}{g}$
La portée est maximale si $\alpha = \frac{\pi}{4}$

5. la flèche :

On appelle la flèche l'altitude maximale atteinte par G (position de F) .
Au point FS le vecteur vitesse est horizontale $\dot{y_F} = 0$, c'est à dire que : $\vec{V}_F \begin{pmatrix} V_{Fx} = V_{0x} \\ V_{Fy} = 0 \end{pmatrix}$ Ou $\left(\frac{dy}{dx}\right)_F = 0$

Les coordonnées de la flèche (F)

$$\frac{dy}{dt} = -g.t_F + v_0sin(\alpha) = 0 \quad t_F = \frac{v_0.sin(\alpha)}{g} \quad \text{d'où } y_F = \frac{v_0^2sin^2\alpha}{2.g} \qquad x_F = \frac{1}{2}.\frac{V_0^2.sin(\alpha).cos(\alpha)}{g} = \frac{V_0^2.sin(2.\alpha)}{g}$$

Exercice d'application :

1. Étude du mouvement d'un solide dans le champ de pesanteur uniforme

On lance, à un instant $t_0 = 0$ avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ horizontale, un solide (S) de petites dimensions, de masse m, d'un point A qui se trouve à la hauteur h du sol. Le solide (S) tombe sur le sol au point d'impact I (figure 1).
On étudie le mouvement du centre d'inertie G dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ lié à la terre supposé galiléen.

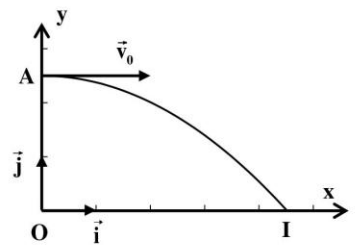


Figure 1

Données:
- Tous les frottements sont négligeables;
- $g = 9,8\ m.s^{-2}$; $h = OA = 1\ m$

1.1. En appliquant la deuxième loi de Newton, établir les expressions littérales des équations horaires x(t) et y(t) du mouvement de G .

1.2. En déduire l'expression littérale de l'équation de la trajectoire du mouvement de G .

1.3. Calculer la valeur de t_I , l'instant d'arrivé de (S) au sol en I .

1.4. On lance de nouveau, à un instant $t_0 = 0$, le solide (S) du point A avec une vitesse initiale [illegible]

Recopier sur votre copie le numéro de la question et écrire la lettre correspondante à la seule proposition vraie:
la valeur de l'instant d'arrivé de (S) au sol vaut:

a	t' = 0,25 s	**b**	t' = 0,35 s	**c**	t' = 0,45 s	**d**	t' = 0,65 s