ملخص درس المنطق

- العبارة هي كل نص رياضي له معنى صحيحا او خاطئا.

امثلة: ($\frac{1}{3}$ عدد صحيح طبيعي) عبارة خاطئة ؛ (لا يوجد اي عدد حقيقي a يحقق $a^2<0$) عبارة صحيحة.

- الدالة العبارية هي كل نص رياضي يحتوي على متغير او اكثر ينتمي الى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا المتغيرات بعناصر من المجموعة.

مثال : $2n+3$ يقبل القسمة على 9، حيث n عدد صحيح طبيعي. اذا عوضنا n ب 3 تصبح عبارة صحيحة واذا عوضنا n ب 1 تصبح عبارة خاطئة.

- المكممات :

  - الرمز $\exists$ يعني : يوجد على الاقل عنصر، ويسمى المكمم الوجودي. مثال : $(\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 1)$ عبارة صحيحة.
  - الرمز $\forall$ يعني : مهما كان، ويسمى المكمم الكوني. مثال : $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0)$ عبارة صحيحة.
  - الرمز $\exists!$ يعني : يوجد عنصر وحيد. مثال : $(\exists! x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 0)$ عبارة صحيحة.

- نفي عبارة P هي عبارة نرمز لها ب $\overline{P}$ او $\neg P$ ولها قيمة حقيقية مضادة للعبارة P.

  - نفي العبارة : $(\forall x \in E: P(x))$ هي العبارة $(\exists x \in E: \overline{P(x)})$
  - نفي العبارة : $(\exists x \in E: P(x))$ هي العبارة $(\forall x \in E: \overline{P(x)})$

- عطف عبارتين P وQ هو عبارة نرمز لها ب : $(P$ و $Q)$ او $(P \wedge Q)$ وتكون صحيحة اذا كانت P وQ صحيحتين معا.
- فصل عبارتين P وQ هو عبارة نرمز لها ب : (P أو Q) او $(P \vee Q)$ وتكون صحيحة اذا كانت احدى العبارتين P أوQ صحيحة.
- استلزام العبارتين P وQ هو العبارة ($\overline{P}$ أو Q) ونرمز لها ب : $(P \Longrightarrow Q)$ وتكون خاطئة فقط اذا كانت P صحيحة وQ خاطئة.
- تكافؤ عبارتين P وQ هو العبارة $((P \Longrightarrow Q)$ و $(Q \Longrightarrow P))$ ونرمز لها ب $(P \Leftrightarrow Q)$ وتكون صحيحة اذا كانت لP وQ نفس القيمة الحقيقية.

- جدول الحقيقة :

P	Q	$\overline{P}$	P و Q	P أو Q	$P \Longrightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

- قوانين موركان :

$\overline{(P \text{ و } Q)} \Leftrightarrow \overline{P}$ أو $\overline{Q}$ ؛ $\overline{(P \text{ أو } Q)} \Leftrightarrow \overline{P}$ و $\overline{Q}$ ؛ $(P$ أو $R)$ و $(P$ أو $Q) \Leftrightarrow (P$ أو $(Q$ و $R))$ ؛

$(P$ و $R)$ أو $(P$ و $Q) \Leftrightarrow (P$ و $(Q$ أو $R))$

- الاستدلالات الرياضية :

  - الاستدلال بالمثال المضاد : لنبين أن العبارة : $(\forall x \in E: P(x))$ خاطئة يكفي ان نبين أن نفيها $(\exists x \in E: \overline{P(x)})$ صحيح

مثال : لنبين أن العبارة $(\forall n \in \mathbb{N}: n > 1)$ نحدد نفيها وهو : $(\exists n \in \mathbb{N}: n \leq 1)$ وبما ان $0 \in \mathbb{N}$ و $n \leq 1$
فان العبارة: $(\exists n \in \mathbb{N}: n \leq 1)$ صحيحة ومنه فان العبارة : $(\forall n \in \mathbb{N}: n > 1)$ خاطئة.

- **الاستدلال بالخلف** : لنبين أن P عبارة صحيحة، نفترض بأنها خاطئة يعني نفيها $\overline{P}$ صحيح. ثم نبين أن $\overline{P}$ تستلزم عبارة خاطئة.

- **الاستدلال الاستنتاجي** : $(P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$.

- **الاستدلال بفضل الحالات** : $\left[(P \text{ او } Q) \Rightarrow R\right] \Rightarrow \left[(P \Rightarrow R) \text{ و } (Q \Rightarrow R)\right]$

للبرهنة على ان $(P \text{ او } Q) \Rightarrow R$ احيانا نبرهن ان : $(P \Rightarrow R) \text{ و } (Q \Rightarrow R)$.

- **الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس** : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$.

لنبين احيانا ان $P \Rightarrow Q$ نبين أن $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$.

- **البرهان بالترجع** : لنبين ان $P(n)$ صحيحة لكل $n \geq n_0$ نتبع الخطوات التالية :
- نبين انها صحيحة من أجل n_0.
- نفترض انها صحيحة من أجل n.
- نبين انها صحيحة من اجل $n + 1$.

مثال :

نبين أن $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ لكل n من IN^*.

من أجل $n = 1$ لدينا $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ اذن العبارة $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ صحيحة من أجل $n = 1$.

نفترض أن $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ صحيحة من أجل n.

نبين أن العبارة صحيحة من أجل n+1 اي $1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 + n + 1}{2} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

اذن العبارة صحيحة كمن اجل n+1 وبالتالي فان $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ لكل n من IN^*.