مادة : الرياضيات	تمارين و أنشطة درس: مبادئ في المنطق	

أنشطة لبناء الدرس

نشاط رقم 1 : (مفهوم العبارة)

1) انقل الجدول التالي إلى دفترك ثم ضع العلامة " × " في الخانة المناسبة :

	صحيح	خطأ
كل عدد زوجي قابل للقسمة على 4		
مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي		
$\sqrt{2}$ عدد جذري		
الإزاحة تحافظ على المسافات		
الدالة x^2 دالة زوجية		

2) هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد .

نشاط رقم 2: (نفي عبارة)

في حوار جرى بين فاطمة و أحمد , أساسه أن كل ما قالته فاطمة ينفيه أحمد و كل ما قاله أحمد تنفيه فاطمة , أنقل الجدول التالي إلى دفترك ثم أملئه :

ماقالته فاطمة	ماقاله أحمد	حكمك على قول فاطمة	حكمك على قول أحمد
$\sqrt{2} \in IN$			
	$\sqrt{7}+\sqrt{2} \prec 5$		
114516 مضاعف ل4			
	$\sqrt{(-2)^2} = -2$		

نشاط رقم 3: (عطف و فصل عبارتين)

أنقل التعابير التالية إلى دفترك ثم أتمم الفراغات بآستعمال إحدى أداتي الربط التاليتين "أو" أو " و " لكي تصبح عبارات صحيحة معللا جوابك في كل حالة :

1) $x(x-1)=0$ يعني أن $x=1$ ..... $x=0$

2) $ABCD$ معين يعني أن $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ ..... $AB=BC$

3) ABC متساوي الأضلاع يعني أن $AB=AC$ ..... $AB=BC$

4) ليكن x و y من IR لدينا $x \le y$ يعني أن $x \prec y$ ... $x=y$

5) ليكن x من IR لدينا $|x|=x$ ..... $|x|=-x$.

6) ليكن x من IR لدينا $|x| \prec 1$ يعني أن $x \prec 1$ ..... $x \succ -1$

7) ليكن x من IR لدينا $|x| \ge 1$ يعني أن $x \ge 1$ ..... $x \le -1$

نشاط رقم 4: (آستلزام و تكافؤ عبارتين)

ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A و غير متساوي الساقين نعتبر العبارات التالية :

P : " ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A "

Q : "$BC^2 = AB^2 + AC^2$"

R : ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة A "

S : "$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$" .

لدينا " إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A فإن "$BC^2 = AB^2 + AC^2$" عبارة صحيحة .

نعبر عن ذلك بالقول " إذا كانت العبارة P صحيحة فإن العبارة Q صحيحة و نقول كذلك العبارة P تستلزم العبارة Q و نكتب : $P \Rightarrow Q$.

1) هل الإستلزامات التالية صحيحة :

$Q \Rightarrow P$ * $P \Rightarrow R$ * $S \Rightarrow P$ * $P \Rightarrow S$ *

2) لدينا (ABC مثلث قائم الزاوية في النقطة A تكافئ العبارة "$BC^2 = AB^2 + AC^2$")

نقول في هذه الحالة العبارة P تكافئ العبارة Q .

و نكتب : $P \Leftrightarrow Q$.

حدد من بين العبارات التالية الصحيحة منها :

أ – ليكن n من IN : n زوجي $\Leftrightarrow$ $n+1$ فردي .

ب - ليكن x من IR : $(x^2=1) \Leftrightarrow x=1$.

ج - ليكن x من IR * : $(x \succ 0) \Leftrightarrow (\frac{1}{x} \prec 0)$.

د – I منتصف $[AB]$ $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

نشاط رقم 5: (الدالة العبارية و المكممات)

نعتبر التعبير التالي : $x^2-x \ge 0$; $(x \in IR)$

1) من أجل $x=2$ لدينا $(2^2-2 \ge 0)$ عبارة صحيحة .

من أجل $x=\frac{1}{2}$ لدينا $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2} \ge 0\right]$ عبارة خاطئة

هل التعبير $x^2-x \ge 0$ صحيح من أجل :

أ) $x=-1$, ب) $x=\frac{1}{3}$, ج) $x=3$, د) $x=\frac{2}{5}$.

التعبير $x^2-x \ge 0$; $(x \in IR)$ يصبح صحيحا من أجل بعض قيم x من IR و خاطئا من أجل قيم أخرى . هذا التعبير يسمى دالة عبارية .

نشاط رقم 6: (المكمم الكوني)

لتكن E مجموعة حلول المتراجحة $x^2-x \ge 0$; $(x \in IR)$

1) حدد المجموعة E

لكل x من E لدينا $x^2-x \ge 0$ عبارة صحيحة

نكتب $(\forall x \in E)$; $x^2-x \ge 0$ و نقرأ لكل x من E : $x^2-x \ge 0$

2) هل العبارتان التاليتان صحيحتان ؟

* $(\forall x \in IR)$; $x^2-x \ge 0$.

* $(\forall x \in Q)$; $x^2-x \ge 0$ $(\forall x \in Q)$; $x^2-x \ge 0$.

نشاط رقم 7: (المكمم الوجودي)

توجد عناصر من Q تحقق المتراجحة $x^2-x \ge 0$.

مثلا $x=\frac{3}{2}$ نعبر عن هذا بالكتابة : $\exists x \in Q ; x^2-x \ge 0$

هل العبارتان التاليتان صحيحتان ؟

* $(\exists x \in IN); x^2-x \ge 0$

* $(\exists x \in Q); x^2-3=0$

مادة : الرياضيات	تمارين و أنشطة درس: مبادئ في المنطق ❷ ❷	

نشاط رقم 8: (الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس)

1) لتكن P و Q عبارتين, أكتب العبارتين $P \Rightarrow Q$ و $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ بآستعمال عمليتي النفي و الفصل المطقيين فقط . ماذا تستنتج ؟

عمليا : للبرهنة على أن $P \Rightarrow Q$ عبارة صحيحة نبين في بعض الأحيان أن $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ هذا النوع من الإستدلال يسمى بالإستلزام المضاد للعكس (آنتبه إلى ترتيب العبارات) .

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا . نعتبر العبارتين :

P : " n عدد زوجي " و Q : " n^2 عدد زوجي "

أ) بين أن : $P \Rightarrow Q$.

ب) ماذا يمكنك أن تقول عن الإستلزام $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ ؟

ج) آستنتج أنه إذا كان n^2 عددا فرديا فإن n عدد فردي .

3) بآستعمال الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس . بين أن :

أ) $\left(a^2+2\sqrt{a}-3 \rangle 0 \Rightarrow a \rangle 1\right)$ حيث a عدد حقيقي موجب .

ب) $\left(a \neq b \Rightarrow \dfrac{a+1}{a-1} \Rightarrow \neq \dfrac{b+1}{b-1}\right)$ حيث a و b عنصران من $IR-\{1\}$.

نشاط رقم 9: (الإستدلال بالتكافؤ)

نقترح عليك برهانين آ ستعمل فيهما الرمز " $\Leftrightarrow$ " بطريقة مسترسلة . أحد البرهانين خاطئ . و المطلوب منك التعرف عليه مع إعطاء تعليل لجوابك .

1) ليكن x من IR لدينا : $\sqrt{x^2+3} \geq 2 \Leftrightarrow x^2+3 \geq 4$

$\Leftrightarrow x^2 \geq 1$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

2) ليكن x منIR لدينا : $x+\dfrac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}-2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2+1-2x}{x} \geq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

نشاط رقم 10: (الإستدلال بالخلف)

1) لتكن P و Q عبارتين بحيث $\left(\overline{Q} \Rightarrow P \text{ و } \overline{Q} \Rightarrow 7P\right)$

إذاكانت Q عبارة خاطئة , ماذا يمكنك أن تقول عن قيمة حقيقة العبارة P ؟

عمليا : للبرهنة على أن عبارة Q صحيحة , نفترض أنها خاطئة (أي $\overline{Q}$ صحيحة) ثم نبين أن : $\overline{Q} \Rightarrow P$ و $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ و هذا تناقض . هذا النوع من الإستدلال يسمى الإستدلال بالخلف .

2) ليكن a و b عددين صحيحين بحيث : $a+b\sqrt{2}=0$.

لتكن P العبارة " $\sqrt{2}$ عدد لا جذري " و Q العبارة " $b=0$ "

أ) بين أنه إذا كانت Q عبارة خاطئة فإن P عبارة خاطئة .

ب) ما هي قيمة حقيقة العبارة P ؟

ج) آستنتج أن : $b=0$.

بين بآستعمال نفس طريقة السؤال 2 , أنه إذا كان a و b عددين حقيقين و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير مستقيميتين بحيث : $a.\vec{u}+b.\vec{v}=\vec{0}$ فإن $a=0$ و $b=0$.

نشاط رقم 11: (الإستدلال بفصل الحالات)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و P الدالة العبارية :

" $n(n+1)$ عدد زوجي : $n \in IN$ " .

1) أنقل و إملاء الجدول التالي :

n	1	2	3	4	5	6
n(n+1)						

ثم حدد قيمة العبارة P في الحالات المذكورة في الجدول :

2) أ) نفترض أن $n=2k$ حيث k عدد صحيح طبيعي .

أ حسب $n(n+1)$ بدلالة k ثم آستنتج قيمة حقيقة الدالة العبارية P .

ب) نفترض أن $n=2k+1$ حيث k عدد صحيح طبيعي .

أحسب $n(n+1)$ بدلالة k ثم آستنتج قيمة حقيقة الدالة العبارية P.

ج) حدد حقيقة الإستلزام التالي :

$\left(n=2k \text{ أو } n=2k+1\right) \Rightarrow$ ($n(n+1)$ زوجي)

ثم آستنتج قيمة حقيقة :

$\left(n \in IN\right) \Rightarrow$ ($n(n+1)$ زوجي)

نشاط رقم 12: (الإستدلال بالترجع)

نعتبرالخاصية $P(n)$ $n \rangle 2^n$ حيث n ينتمي إلى IN .

1) تحقق من أن العبارة $P(0)$ صحيحة .

2) بين أ ن $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ عبارة صحيحة مهما يكنn من IN .

3) بآستعمال الإستدلال الإستنتاجي آ ستنتج أ ن العبارة $P(5)$ صحيحة

تمارين تطبيقية

التمرين التطبيقي رقم 1 :

1) أعط نفي كل عبارة من العبارات الآتية محددا قيمة حقيقتها :

P: " $\sqrt{17} \succ \sqrt{8}+\sqrt{9}$ " .

Q: " $\dfrac{9}{4} \neq \dfrac{3}{2}$ " .

R: " $\pi \in Q$ " .

2) حدد قيمة حقيقة العبارات الآتية :

P: " $\pi^2 \geq 10$ و $4-\pi \rangle 0$ " .

Q: " $\cos(\pi)=1$ أو $\cos(\pi)=-1$ " .

R: " كل متوازي الأضلاع قطراه متعامدان هو مربع "

التمرين التطبيقي رقم 2 :

1) حدد من بين العبارات الآتية الصحيحة منها و الخاطئة .

P: " $0 \in IN \Rightarrow Z \subset IN$ "

Q: " $\sqrt{3} \rangle \dfrac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{3} \rangle 1$ "

R: " $\sqrt{3}+\sqrt{2} \langle \sqrt{5} \Rightarrow \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5$ "

مادة : الرياضيات	تمارين و أنشطة درس: مبادئ في المنطق ❸ ❸	

2) نفس السؤال :

P: "$\left(a \in IR\right)\ ;\ a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$"

Q: "$\left(a \in IR^+\right)\ ;\ a^2 = 1 \Leftrightarrow a \rangle \sqrt{3}$"

R: "$\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$"

التمرين التطبيقي رقم 3:

1) عبر عن النصوص التالية بإستعمال المكممات .

أ - لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد على الاقل عدد صحيح طبيعي k بحيث $k \geq n$.

ب - مربع كل عدد حقيقي موجب .

ج - كل عدد صحيح طبيعي يقبل القسمةعلى 8 هو مضاعف للعدد 4

2) أوجد العبارات النافية للعبارات الآتية :

أ - $\left(\forall x \in IR\right);\left(x \geq 0 \text{ أو } x \leq 0\right)$.

ب - $\left(\exists x \in IN\right);\left(x+1\rangle x^2\right)$.

التمرين التطبيقي رقم 4:

لتكن f دالة تزايدية قطعا على مجال I, و a وb عنصرين من I بحيث $f(a) = b$ و $f(b) = a$ بين أن : $a = b$

التمرين التطبيقي رقم 5:

1) لتكن f دالة تزايدية قطعا على مجال I , وa و bعنصرين من I بحيث $f(a) = b$ و $f(b) = a$, بين أن : $a = b$.

2) ليكن a و b عددين حقيقيين .

بين أن : $a+b\rangle 1 \Rightarrow \left(a\rangle \frac{1}{2} \text{ أو } b\rangle \frac{1}{2}\right)$

التمرين التطبيقي رقم 6:

1) لكل n من IN* نضع : $A_n = 3^{2n} - 2^n$

تحقق من أن لكلn من IN* : $A_{n+1} = 2A_n + 7.3^{2n}$

2) بين بالترجع أ ن لكل n من IN* : 7 يقسم A_n .

تمارين الدعم و التثبيت

العمليات على العبارات - المكممات

التمرين رقم 1 :

أ عط قيمة حقيقة العبارات التالية :

1) " النقطة C هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (BC) في المثلث ABC القائم الزاوية في A ".

2)" الشكل القانوني للحدودية $-2x^2 + 6x + 1$:

هو " $-2\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)$ "

3) $\left(\sqrt{9} = -3\right)$ و $\left((-3)^2 = 9\right)$

4) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\rangle 3\right)$ أو (π عدد جدري)

5) $\left(\sqrt{12} \neq 3\right)$ و $\left(\sqrt{4} = 2\right)$

التمرين رقم 2 :

حدد S مجموعة الأعداد الحقيقية x التي تكون فيها الدالة العبارية صحيحة في كل من الحالات التالية :

1) "$\vec{u}(1-x,2)$ و $\vec{v}((1-x)^2,(1-x))$ مستقيميتان $x \in IR$ "

2) "$x \in IR; x^2 - x - 12 = 0$" .

3) "$x \in IR; x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$" .

التمرين رقم 3 :

أ كتب العبارات التالية بأستعمال المكممات و الروابط المنطقية .

1) كل عدد جدري a يكتب $a = \frac{p}{q}$ حيث $p \in Z$ و $q \in IN^*$

2) يوجد عدد صحيح طبيعي و حيد أ صغر من أ و يساوي جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية .

3) مهما يكن x من IR يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث $p \leq x \leq p+1$.

4) لكل x من IR يوجد على الاقل n من IN بحيث $n \geq x$

5) كل عدد صحيح طبيعي يقبل القسمة على 8 هو مضاعف للعدد4

6) لكل k من Z يوجد p من Z بحيث $k = 2p$ أو $k = 2p+1$

7) ABC مثلث قائم الزاوية في A إ ذا و فقط إذا كان I منتصف القطعة $[BC]$ يبعد بنفس المسافة عن رؤوس المثلث ABC

التمرين رقم 4 :

حدد نفي كل عبارة من العبارات التالية ثم آ ستنتج صحتها:

$(P): (\exists\, x \in Q) / x^2 - 2 \neq 0$

$(Q): (\forall\, n \in Z)(\exists m \in Z) / 3n - 2m = \sqrt{5}$

$(R): (\forall\, y \in IR)(\exists\, x \in IR) / \frac{2x}{1+x^2} \langle y$

التمرين رقم 5 : (الإستدلال بفصل الحالات)

1) بين أ ن : $\left(\forall x \in IR\right); \sqrt{x^2+1} + x \rangle 0$

2) حل في IR المعادلة : $x^2 - |x-2| + 5 = 0$

3) حل النظمة : $\begin{cases} 2|x-1| - y = 4 \\ |x| + 2y = 6 \end{cases}$.

4) بين أن : $n(n+1)(n+2)$

التمرين رقم 6 : (الإستدلال بالإستلزام المضاد للعكس)

1) بين أ ن : $y \rangle z$ أو $x \rangle z \Rightarrow x+y \rangle 2z$ حيث x و yو z أ عداد حقيقية

2) $(\forall x \in IR): x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$

3) $\left(\forall (x;y) \in IR^2\right)\ y \neq -\frac{3}{4}x \Rightarrow \frac{x-y}{x+y} \neq 7$

4) $\forall (x,y) \in IR^2\ \ x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

مادة : الرياضيات	تمارين و أنشطة درس: مبادئ في المنطق ❹ ❹	ثا.المختار السوسي .نيابة الخميسات

التمرين رقم 7 : (الإستدلال بالتكافؤ)

1) ليكن a و b و c أعداد حقيقية .

أ) بين أن : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

ب) بين أن : $a^3+a=b^3+b \Leftrightarrow a=b$

2) ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال $]-1,1[$

بين أن : $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$.

3) ليكن x عددا حقيقيا .

بين أن : $\frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3} \Leftrightarrow |x-1| < \frac{1}{2}$.

التمرين رقم 8 : (الإستدلال بأستعمال مثال مضاد)

1) بين أن العبارة $\left(\forall x \in IR^*\right)$; $x+\frac{1}{x} \geq 2$ خاطئة .

2) نعتبر الدالة f العددية المعرفة على IR بما يلي :

$f(x)=2x^2-x+3$

بين أن ليست زوجية و لا فردية .

3) لتكن a و b و c و d أعداد حقيقية .

بين أن العبارة $\begin{cases} a \neq b \\ c \neq d \end{cases} \Rightarrow a+c \neq b+d$ عبارة خاطئة .

التمرين رقم 9 : (الإستدلال بأستعمال الإستلزامات المتتالية)

1) ليكن x عددا حقيقيا .

بين أن : $2 < x < 4 \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1$

2) بين أن : $\left(\forall x \in IR^+\right)$; $\frac{1}{1+\sqrt{x}}=1-\sqrt{x} \Rightarrow x=0$

3) بين أن $b=0$ و $a=0$ $\left(\forall (a,b) \in IR^2\right)$; $a^2+b^2=0 \Rightarrow a=0$

4) ليكن و عددين حقيقيين موجبين .

بين أن : $\left(x+y+2=2\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right) \Rightarrow x=y=1$

التمرين رقم 10 : (الإستدلال الإستنتاجي)

1) ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a^2+b^2=1$

بين أن : $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

2) ليكن a و x عنصرين من IR بحيث $|a|<1$ و $|x|<1$

أ – بين أن : $|ax^2+x-a| < |a||x^2-1|+|x|$

ب – آستنتج أن : $|ax^2+x-a| < -x^2+|x|+1$

ثم آستنتج أن : $|ax^2+x-a| < \frac{5}{4}$

تذكر أن $\left(x^2-Ax=\left(x-\frac{A^2}{2}\right)-\frac{A^2}{4}\right)$

التمرين رقم 11 : (الإستدلال بالخلف)

1) لتكن و و أ عداد حقيقية

بين أن النظمة : $\begin{cases} 2x-3z>3 \\ 3y-2x \geq 3 \\ y-z \leq 2 \end{cases}$ ليس لها حل .

2) بين أن : $\sqrt{6} \notin Q$ و $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin Q$.

3) ABCD متوازي الأضلاع مركزه O .

I منتصف $[AB]$ و J النقطة المعرفة بما يلي : $\overrightarrow{BJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

أ – بين أن المستقيمين (AB) و (IJ) غير متوازيين .

ب - بين أن المستقيم (IJ) لا يمر من O .

التمرين رقم 12 : (الإستدلال بالترجع)

1) بين بالترجع أن لكل n من IN* :

أ) $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ب) $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ج) $1^3+2^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2) بين أن : 9 يقسم 4^n+6n-1 $\left(\forall n \in IN^*\right)$

3) بين أن : 11 يقسم $3^{2n}+2^{6n-5}$ $\left(\forall n \in IN^*\right)$

مسألة رقم 1 :

يوجد على ضفة نهر ثلاثة أزواج و قارب و احد نريد تنظيم رحلات لنقل الأزواج إلى ضفة أ خرى بواسطة القارب الذي لا يسع لأكثر من شخصين دون السماح ببقاء زوجة مع رجل آخر في غياب زوجها .

كيف السبيل إلى ذلك ؟

مسألة رقم 2 :

قدم أحد التلاميذ برهان على أن "$2=1$" على الشكل التالي :

(ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a=b$ إذن $a^2=ab$

و منه : $a^2+b^2-2ab=ab+b^2-2ab$

أي $(a-b)^2=b(a-b)$ إذن $a-b=b$ أي $a=2b$

و بما أن $a=b$ فإن $2=1$)

آ كتشف الخطأ الذي آ رتكبه هذا التلميذ .

مسألة رقم 3:

بينما قدمت تلميذة تحريرا آخر لكي تجد أن : $1=0,999.....$

(نعتبر العدد الحقيقي a بحيث $a=0,999....$

إذن $10a=9,999...$ و منه $10a-a=9$

إذن : $9a=9$ و بالتالي $a=1$ أي : $1=0,999...$)

آ كتشف الخطأ الذي آ رتكبته هذه التلميذة .